4.5. İki Değişkenin Birbirine Oranı Tahminin Varyansı

TEOREM 4:

N genişliğinde bir kitleden yeteri derecede n genişliğinde bir örneklem BRÖ ile çekildiğinde örneklemde birimden birime iki değişken değeri x_i ve y_i ölçülebiliyorsa bu değişkenlerin oranlarını varyansı:

$$V(\hat{R}) \cong \frac{1-f}{n\bar{X}^2}\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N-1}$$

İSPAT 4:

$$V(\hat{\theta}) = E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2$$

$$V(\hat{R}) = E(\hat{R} - R)^2$$

$$(\hat{R} - R)^2 = \left(\frac{\bar{y} - R\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2, \bar{x} \cong \bar{X}$$

$$V(\hat{R}) = E(\hat{R} - R)^2 \cong \frac{E(\bar{y} - R\bar{x})^2}{\bar{X}^2} \qquad (1)$$

Burada $d_i = y_i - Rx_i$ tesadüfi değişkenini tanımlarsak bunun örneklem ortalaması $\bar{d} = \bar{y} - R\bar{x}$ kitle ortalaması ise $\bar{D} = \bar{Y} - R\bar{X} = 0$

$$V(\bar{d}) = E(\bar{d} - \bar{D})^2 = E(\bar{d})^2$$

$$= (1-f)\frac{S_d^2}{n} \qquad (2)$$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \bar{D})^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N-1} \qquad (3)$$

(3) eşitliğini (2)'de, (2)'yi de (1)'de yerine yazarsak teorem ispatlanmış olur.

$$V(\bar{d}) = E(\bar{d})^2 = E(\bar{y} - R\bar{x})^2 = \frac{(1-f)}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N-1}$$

$$V(\hat{R}) \cong \frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{N-1}$$

SONUÇ 4:

$\hat{R}$'nın varyansının tahmin edicisi

$$\hat{V}(\hat{R}) = \frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \hat{R}x_i\right)^2}{n-1}$$

$$sh(\hat{R}) = \frac{1}{\bar{x}}\sqrt{\frac{(1-f)}{n}\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - Rx_i)^2}{n-1}}$$

4.6 Belli Özelliğe Sahip Birimler Oranının Tahmini

N birimlik bir kitlede beli özeliğe sahip birimlerin sayısı A olmak üzere, belli özelliğe sahip birimler oranı $P = \frac{A}{N}$'dir. Örneğin; Türkiye'de ev sahibi olanların oranı, yüksekokul bitirenlerin oranı gibi. P'nin örneklemden tahmini

$$\hat{P} = p = \frac{a}{n}$$

şeklindedir. Burada n örneklem genişliği olmak üzere a ise örneklemdeki belli özelliğe sahip birimlerin sayısıdır.

Kitledeki bellie özelliğe sahip birimlerin sayısının tahmini ise $\hat{A} = Np$ biçiminde ifade edilir.

Kitlede i-nci birim istenen özelliğe sahip ise $y_i = 1$ değil ise $y_i = 0$ olur.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = A, \sum_{i=1}^{N} y_i^2 = A$$

p, $\bar{y}$ ile aynı özelliğe sahip olduğundan $E(p) = P$ yani p yansız tahminidir. p tahmininin varyansı için aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM 5:

P oranının yansız p tahmin edicisinin varyansı;

$$V(p) = \frac{N-n}{N-1}\frac{PQ}{n}$$

İSPAT 5:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^2 - 2y_i\bar{Y} - \bar{Y}^2\right)}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\bar{Y}\sum_{i=1}^{N} y_i + N\bar{Y}^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2N\bar{Y}^2 + N\bar{Y}^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_{i}^{N} y_i^2 - N\bar{Y}^2}{N-1}$$

$$\bar{y} = p, \bar{Y} = P, P = \frac{A}{N}, A = NP$$

$$S^2 = \frac{A - NP^2}{N-1}$$

$$= \frac{A - AP}{N-1} = \frac{A(1-P)}{N-1}$$

$$S^2 = \frac{NPQ}{N-1}, Q = 1 - P$$

$$V(\bar{y}) = (1-f)\frac{S^2}{n} = (1-f)\frac{NPQ}{n}$$

$$V(p) = \frac{(1-f)NPQ}{n(N-1)}$$

Sonuç 1:

Örneklemden belli özelliğe sahip birim sayısı tahmini $\hat{A} = Np$'nin varyansı:

$$V(\hat{A}) = V(NP) = N^2 V(P)$$

$$= \frac{N^2(1-f)NPQ}{n(N-1)} = N^2 \frac{N-n}{N} \frac{NPQ}{n(N-1)}$$

$$= \frac{N^2(N-n)PQ}{n(N-1)}$$

Sonuç 2:

Varyansların tahminleri için S^2 yerine s^2 kullanılırsa

$$S^2 = \frac{npq}{n-1}$$

$$\hat{V}(p) = \frac{(1-f)}{n} \frac{npq}{n-1}$$

$$= \frac{(1-f)pq}{n-1}$$

Sonuç 3:

$f < 0{,}05$ ise ve örneklem genişliği yeteri derecede büyük ise $1 - f \cong 1$ olur. $(1 - f)$'e düzeltme terimi, f'e örneklem oranı denir. n yeteri derecede büyük ise $n - 1 \cong n$ alınır.

$$\hat{V}(p) = \frac{pq}{n}$$

$$\hat{V}(\hat{A}) = N^2 \frac{pq}{n}$$

Sonuç 4:

$$sh(p) = \sqrt{\hat{V}(p)}$$

$$= \sqrt{(1 - f)\frac{pq}{n - 1}}$$

$$sh(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$Aralık\ tahmini: p \pm \left(t \times sh(p) + \frac{1}{2n}\right) = p \pm \left(t \times \sqrt{(1 - f)\frac{pq}{n - 1}} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{1}{2n} = Süreklilik\ düzeltmesi$$

Binomdan normale yaklaştığımız için $\frac{1}{2n}$ süreklilik düzeltmesi kullanırız.